Université Paul Sabatier 2018/2019

L2 Maths "Compléments de théorie des ensembles"

TD n° 2: Ensembles II

Exercice 1. *Soient E et F des ensembles. À quelle condition a-t-on respectivement $E \times F = \emptyset$? $E \times F = \{a\}$? $E \times F = \{a, b\}$?*
Si on a deux ensembles finis $E = \{x_1, \ldots, x_n\}$ et $F = \{y_1, \ldots, y_m\}$, combien d'éléments a l'ensemble $E \times F$?

Exercice 2. *1) On a définit l'inclusion en utilisant l'appartenance ($A \subset B$ si et seulement si $\forall x \in A, x \in B$). Peut-on définir l'appartenance en utilisant l'inclusion?*
2) Montrer que $A \subset B \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$.

Exercice 3. *1) À quelle condition a-t-on respectivement $\mathcal{P}(E) = \emptyset$? $\mathcal{P}(E) = \{a\}$? $\mathcal{P}(E) = \{a, b\}$? $\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(F)$?*
2) Peut-on avoir $\mathcal{P}(E) = E$?

Exercice 4. *Comparer $\mathcal{P}(E \cap F)$ et $\mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$; $\mathcal{P}(E \cup F)$ et $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$; $\mathcal{P}(E \times F)$ et $\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$.*

Exercice 5. *1) Démontrer que la propriété $A(x) := (x \notin x)$ n'est pas collectivisante. (Procéder par l'absurde.)*
2) La propriété $B(x) := (x = x)$ est-elle collectivisante ? (Utiliser l'exercice 5 de la feuille 1 et l'axiome de séparation.)
3) Existe-t-il un ensemble de tous les ensembles ?
4) Pouvez-vous donner une autre propriété qui ne soit pas collectivisante?

Exercice 6. *Soit $f : X \to Y$ une application de X dans Y des ensembles. Existe-t-il toujours l'ensemble image $Im(f) = \{y \in Y / \exists x \in X,\ f(x) = y\}$? Et l'ensemble graphe $\{(x, f(x))\}$?*

Exercice 7. *1) Démontrer que $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a'\}, \{a', b'\}\}$ si, et seulement si, $a = a'$ et $b = b'$. (Distinguer deux cas, selon que $b = a$ ou $b \neq a$.)*
2) Cela peut donc servir à construire les couples en définissant *$(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$. A-t-on alors $(a, (b, c)) = ((a, b), c)$?*
